

Лекция 10. Касательные напряжения при изгибе

1. Формула Журавского для касательных напряжений.
2. Касательные напряжения в тонкостенных сечениях.
3. Центр изгиба.

1

Рассмотрим прямой изгиб балки с выпуклым сечением, и установим распределение касательных напряжений в сечениях этой балки. Исследование проведем на основе гипотез Д.И. Журавского (1855):

1. По линиям, нормальным к плоскости изгиба, касательные напряжения не меняются.
2. Касательные напряжения в сечении направлены в сторону действия поперечной силы.

На рис.10.1 показано распределение касательных напряжений согласно гипотезам Журавского. Далее, как обычно, скользящую СК выбираем с осью Oy , лежащей в силовой плоскости.

Получим зависимость $\tau(y_0)$ касательного напряжения от координаты y_0 любой точки сечения при заданных силовых факторах.

Будем рассматривать балку в скользящей СК $Oxyz$ выбранного сечения. Поперечными сечениями с $z = 0$ и $z = -dz$ выделим тонкий слой, из которого плоскостью $y = y_0$ выделим нижний¹ сегмент (Рис.10.2). Искомое напряжение $\tau(y_0)$ определим из уравнения равновесия сил для сегмента балки.

Назовем *хордой сечения* отрезок, соединяющий две точки контура сечения и целиком лежащий в нем. Хорду, определяемую условием $y = y_0$, назовем хордой уровня y_0 . Эта хорда параллельна оси Ox и, согласно первой гипотезе, на ее протяжении касательное напряжение постоянно.

Рассмотрим касательные напряжения на двух смежных площадках 1 и 2, пересекающихся по хорде AB уровня y_0 (Рис.10.2). Площадка 1 выбрана в плоскости поперечного сечения, площадка 2 выбрана в продольной грани сегмента, вектор касательного напряжения на ней обозначим τ_2 . Вид слева на выделенный слой балки показан на рис.10.3. Для проекции на ось Oz вектора напряжения τ_2 имеем: $\tau_{2z} = -\tau_{yz}$, где в правой части — элемент матрицы напряжений для точек площадки. Знак “-” объясняется ориентацией площадки 2 противоположно направлению Oy . С другой сторо-

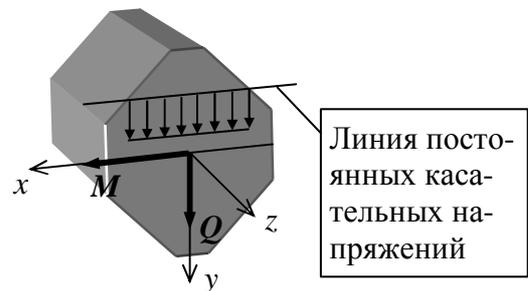


Рис.10.1. Внутренние силовые факторы и касательные напряжения в выпуклом сечении

¹ Правильно говорить: выделим область $y > y_0$.

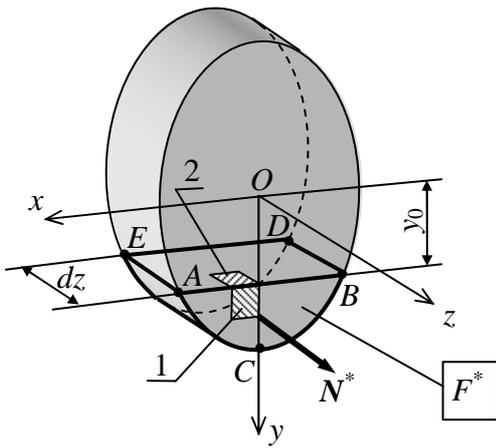


Рис.10.2. Выделение пространственного сегмента балки:
 $ABDE$ — отсекающая плоскость $y = y_0$;
 F^* — площадь плоского сегмента ABC ;
 1, 2 — смежные элементарные площадки;
 Oyz — плоскость изгиба

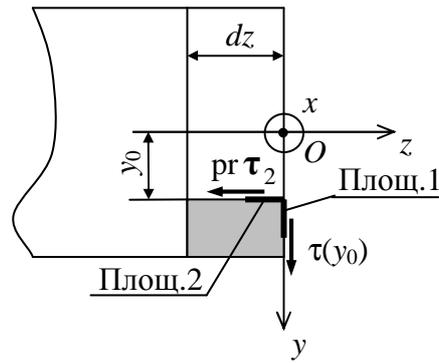


Рис.10.3. Направления касательных напряжений в проекции на плоскость изгиба:

$\text{pr } \tau_2$ — векторная проекция касательного напряжения на площадке 2;
 сегмент балки выделен серым цветом

ны, напряжение на площадке 1 направлено по оси Oy и равно $\tau_{zy} = \tau(y_0)$. Пользуясь симметрией матрицы напряжений, устанавливаем связь касательных напряжений на рассматриваемых площадках:

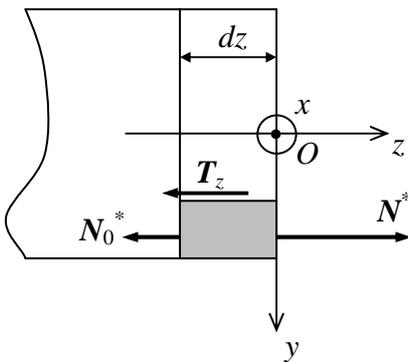
$$\tau_{2z} = -\tau_{yz} = -\tau_{zy} = -\tau(y_0).$$

Таким образом, на верхнюю грань сегмента балки действует сила T , у которой проекция на ось Oz имеет вид:

$$T_z = \tau_{2z} \cdot S(ABDE) = -\tau(y_0) b dz, \quad (10.1)$$

где $S(\cdot)$ — обозначение площади указанной фигуры; $b = AB$ — длина хорды уровня y_0 сечения.

Помимо сил, действующих на продольную грань, на выделенный сегмент действуют внутренние силы через поперечные сечения. Боковые грани $z = -dz$ и $z = 0$ будем называть, соответственно, левой и правой (имея в виду, что ось Oz направлена слева направо, см. рис.10.3). Обозначим N^* проекцию на ось Oz внутренней силы, действующей на правую грань сегмента, N_0^* — такую же проекцию силы, действующей на левую грань. В пренебрежении массовыми силами условие равновесия в проекции на ось Oz имеет вид (Рис.10.4):



$$N^* + N_0^* + T_z = 0. \quad (10.2)$$

Обозначим F^* — площадь плоского сегмента с границей y_0 (Рис.10.2);

$$S_x^* = \int_{F^*} y dF \quad (10.3)$$

— статический момент плоского сегмента с

Рис.10.4. Продольные составляющие сил, действующих на границы сегмента:
 T_z — составляющая касательной силы T

границей y_0 .

Сила N^* создается нормальными напряжениями в правом сечении и вычисляется в виде:

$$N^* = \int_{F^*} \sigma_z dF = \frac{M_x}{J_x} \int_{F^*} y dF = \frac{M_x S_x^*}{J_x}. \quad (10.4)$$

Здесь использована формула нормальных напряжений в случае прямого изгиба (9.13).

Сила N_0^* может быть получена подобным образом в виде:

$$N_0^* = -\frac{M_{0x} S_x^*}{J_x}, \quad (10.5)$$

где M_{0x} — изгибающий момент в левом сечении. Знак “–” указывает, что направление площадки изменилось на противоположное (теперь левая часть балки действует на правую).

Величина $dM_x = M_x - M_{0x}$ есть приращение изгибающего момента на протяжении участка балки dz . С ее помощью сумму продольных сил на боковые грани получаем в виде:

$$N^* + N_0^* = \frac{dM_x S_x^*}{J_x}. \quad (10.6)$$

Подставляя выражения (10.1) и (10.6) в условие равновесия (10.2), получим:

$$\frac{dM_x S_x^*}{J_x} - \tau(y_0) b dz = 0,$$

или

$$\tau(y_0) = \frac{dM_x}{dz} \frac{S_x^*}{b J_x}.$$

Наконец, замечая, что производную момента по координате сечения можно заменить поперечной силой в сечении (см. второе дифференциальное соотношение для силовых факторов), получаем формулу Журавского:

$$\tau(y) = \frac{Q S_x^*}{b J_x} \quad (10.7)$$

(здесь координата y указывается без вспомогательного индекса).

Итак, применяя гипотезы Журавского, удалось определить касательное напряжение в любой точке поперечного сечения с координатой y через поперечную силу Q и геометрические характеристики сечения: осевой момент инерции J_x , статический момент S_x^* плоского сегмента с границей y ; длину b хорды сечения уровня y .

Применяя формулу Журавского к сечениям различной формы, можно обнаружить, что касательные напряжения достигают максимального значения на нейтральной линии и убывают по мере удаления от нее. В точках с максимальным удалением от нейтральной линии касательные напря-

жения обращаются в нуль. На рис.10.5 показана эпюра касательных напряжений на базовой линии, лежащей в плоскости изгиба стержня прямоугольного профиля. В данном случае эпюра является параболой с максимальным значением

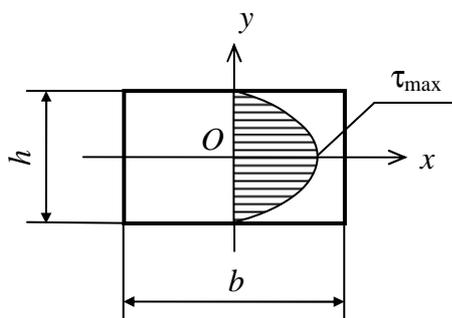


Рис.10.5. Эпюра касательных напряжений: плоскость изгиба содержит ось Oy

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}$$

Читателю рекомендуется проверить это самостоятельно.

2

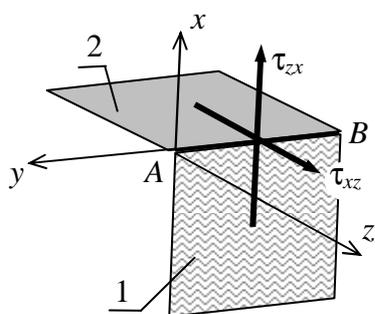


Рис.10.6. Составляющие напряжений на взаимно ортогональных площадках: стрелками указаны положительные направления и при них — алгебраические значения напряжений

Рассмотрим две смежных элементарных площадки 1 и 2, из которых площадка 1 находится в поперечном сечении балки, а площадка 2 находится на ее поверхности. Линия пересечения этих площадок AB принадлежит контуру сечения. Выберем СК $Axyz$, у которой ось z нормальна к сечению, а ось x нормальна к поверхности балки (Рис.10.6). Рассмотрим два напряжения: проекцию τ_{zx} касательного напряжения, действующего на площадке 1, на ось x , и проекцию τ_{xz} касательного напряжения, действующего на площадке 2, на ось z . Эти напряжения равны вследствие симметрии матрицы напряжений. На большей части поверхности балки, где нет приложения внешних сил, отсутствует напряжение на площадке 2, то есть $\tau_{xz} = 0$. Поэтому вектор напряжения, действующего на площадке поперечного сечения вблизи контура, не имеет составляющей,

нормальной к поверхности балки. Соответственно касательное напряжение на этой площадке направлено по касательной к контуру сечения (вдоль оси Ay на рис.10.6).

Итак, распределение касательных напряжений, показанное на рис.10.1, требует уточнения: вблизи поверхности балки вектор напряжений должен быть направлен по касательной к контуру. В общем случае вторая гипотеза Журавского не выполняется.

Если для балок с выпуклым сечением распределение касательных напряжений приближенно соответствует выдвинутым гипотезам, и формула Журавского хорошо согласуется с опытом, то для балок тонкостенных, у которых границы сечения отстоят друг от друга на малом расстоянии δ , эта формула может привести к грубым ошибкам.

Будем описывать тонкостенные балки средней линией сечения и толщиной стенки (вообще говоря, переменной). *Средней линией сечения называется линия, равноотстоящая от контура сечения. Расстояние δ между противоположными точками контура по обе стороны средней линии назовем толщиной стенки стержня.*

На рис.10.7 показаны примеры разрывной средней линии для двутаврового и корытного профилей стержня. Далее ограничимся незамкнутыми сечениями, у которых нормаль к средней линии, лежащая в сечении, разбивает его на две части. На рис.10.7 показаны незамкнутые сечения. Поперечное сечение трубы — пример замкнутого сечения.

Введем **гипотезы для напряжений в тонкостенных сечениях:**

1. По нормали к средней линии касательные напряжения в поперечном сечении не меняются.
2. Касательные напряжения направлены вдоль средней линии сечения.

Эти гипотезы не противоречат утверждению о направлении касательных напряжений вблизи контура сечения по линии контура. Гипотезы близки по содержанию к гипотезам Журавского и позволяют определить касательное напряжение в любой точке незамкнутого сечения, применяя описанную выше технику.

Особенность незамкнутых сечений в том, что хорда, нормальная к средней линии, разбивает сечение на две части. Чтобы определить касательное напряжение на этой хорде, следует построить на ней продольную плоскость, которая отсечет пространственный сегмент в тонком слое балки.

В отличие от предыдущей задачи продольная плоскость не обязательно будет перпендикулярна направлению поперечной силы, однако в обоих случаях след продольной плоскости на поперечном сечении есть линия постоянных касательных напряжений. На рис.10.8 показан пример выделения пространственного сегмента из тонкостенного стержня с указанием продольных составляющих внутренних сил. Уравнение равновесия сил для выделенного сегмента по-прежнему имеет вид (10.2), и из него следует формула Журавского для тонкостенных сечений:

$$\tau = \frac{QS_x^*}{\delta J_x}. \quad (10.8)$$

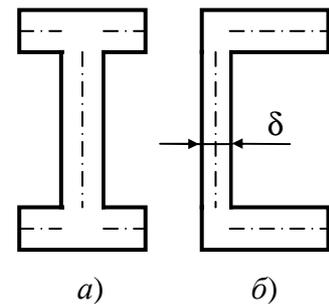


Рис.10.7. Средние линии тонкостенных сечений: *a* — двутавровый профиль; *б* — швеллер (корытный профиль)

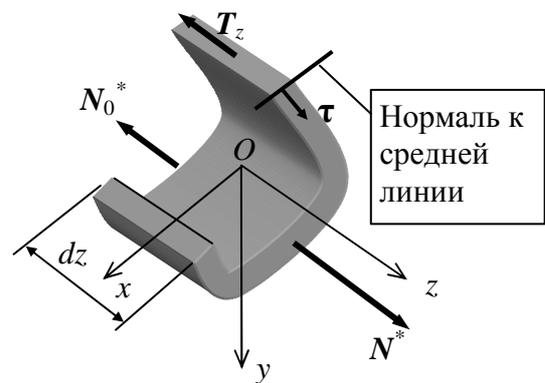


Рис.10.8. Пространственный сегмент тонкостенной балки: τ — касательное напряжение на хорде сечения

Здесь в левой части — касательное напряжение в пределах хорды, нормальной к средней линии; S_x^* — статический момент плоского сегмента сечения, лежащего по одну сторону хорды; δ — длина этой хорды (толщина стенки стержня); Q — поперечная сила, действующая в направлении оси Oy .

Положительным направлением касательного напряжения следует считать направление средней линии в сторону плоского сегмента сечения, для которого рассчитывается статический момент S_x^* . Истинное направление определяется алгебраическим значением величины (10.8). На рис.10.9 штриховкой выделены области для расчета статического момента при определении касательного напряжения в точке A и указаны положительные направления этого напряжения. Не имеет значения, с какой стороны хорды выбирать сегмент сечения.

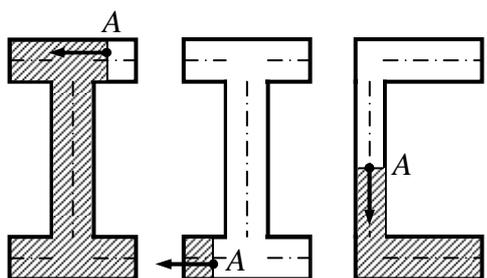


Рис.10.9

Применение формулы (10.8) для расчета касательных напряжений в тонкостенных сечениях показывает, что эти напряжения распределены потоком с преимущественным направлением в сторону поперечной силы. При постоянной толщине стенки δ эти напряжения обычно достигают максимального значения на нейтральной линии, где $y = 0$. На рис.10.10 показаны примеры потока касательных напряжений для швеллера и сечения трубы с продольным разрезом. Там же представлены эпюры этих напряжений.

При постоянной толщине стенки δ эти напряжения обычно достигают максимального значения на нейтральной линии, где $y = 0$. На рис.10.10 показаны примеры потока касательных напряжений для швеллера и сечения трубы с продольным разрезом. Там же представлены эпюры этих напряжений.

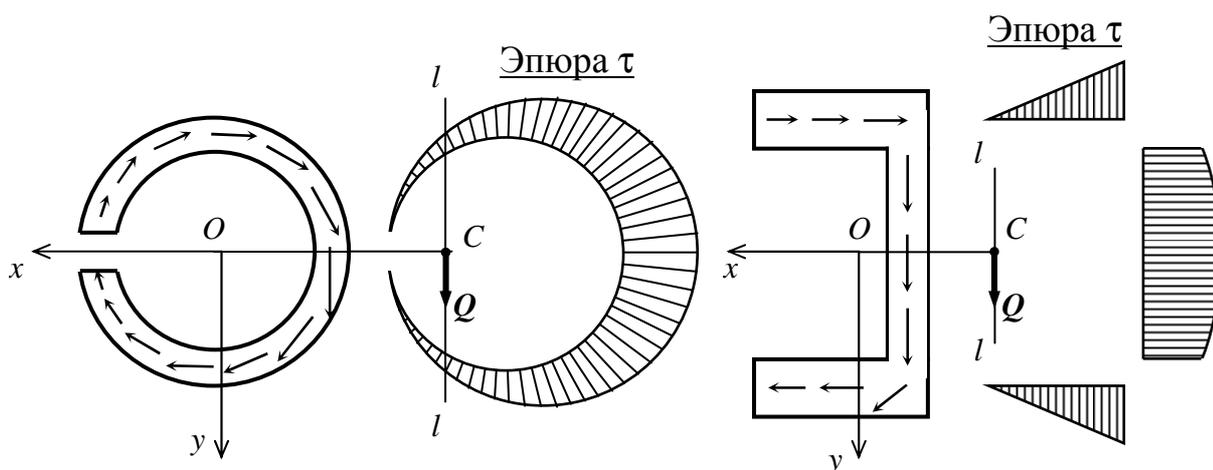


Рис.10.10. Распределение касательных напряжений в тонкостенных сечениях (базовыми линиями эпюр выбраны средние линии сечений):

Q — равнодействующая касательных сил; C — центр изгиба;

$l-l$ — расчетная линия действия равнодействующей касательных сил

Теория изгиба тонкостенных балок основана на системе четырех гипотез: две основных гипотезы изгиба, сформулированные в лекции 8, и две гипотезы о напряжениях в тонкостенных сечениях. Приближенный характер этих гипотез в некоторых случаях приводит к выводам теории, противоречащим исходным предпосылкам и опыту. Применение формулы Журавского (10.8) для расчета касательных напряжений в тонкостенных сечениях позволяет выявить эти противоречия и устранить их.

Получим вначале выражение для крутящего момента через напряжения в сечении стержня при произвольных нагрузках. В лекции 7 было установлено, что изгибающие моменты определяются нормальными напряжениями в сечении. Рис.7.6 позволяет установить, что крутящий момент определяется касательными напряжениями. В самом деле, согласно определению момента, вклад в крутящий момент от элементарной силы $d\mathbf{R}$ равен

$$dM_z = x dR_y - y dR_x = x\tau_{zy} dF - y\tau_{zx} dF,$$

а крутящий момент соответственно имеет вид (ср. с формулами (7.9) и (7.10)):

$$M_z = \int_F (x\tau_{zy} - y\tau_{zx}) dF. \quad (10.9)$$

При расчете суммарного момента систему сил можно заменить равнодействующей. Известно, что для плоской системы сил с ненулевой векторной суммой равнодействующая существует, и точка ее приложения выбирается произвольно на линии действия равнодействующей. В частности, система касательных сил имеет равнодействующей вектор поперечной силы Q , точку приложения которой обозначим C . Поскольку крутящий момент создается касательными силами, он может быть получен как момент от поперечной силы. Например, если последняя направлена параллельно оси Oy , получаем для крутящего момента:

$$M_z = x_C Q. \quad (10.10)$$

где x_C — координата линии действия касательных сил в скользящей СК.

Назовем центром изгиба точку пересечения двух линий действия касательных сил в поперечном сечении, соответствующих двум прямым изгибам во взаимно ортогональных плоскостях и определяемых формулой Журавского для тонкостенных сечений.

Заметим, что координаты центра изгиба в главных центральных осях не зависят от нагрузок на балку, а определяются исключительно формой и размерами сечения, поскольку согласно формуле (10.8) касательные напряжения с точностью до коэффициента пропорциональности Q зависят только от характеристик сечения. Заметим также, что центр изгиба является точкой приложения поперечной силы в сечении в обоих случаях прямого изгиба при условии, что формула Журавского правильно задает распределение касательных напряжений.

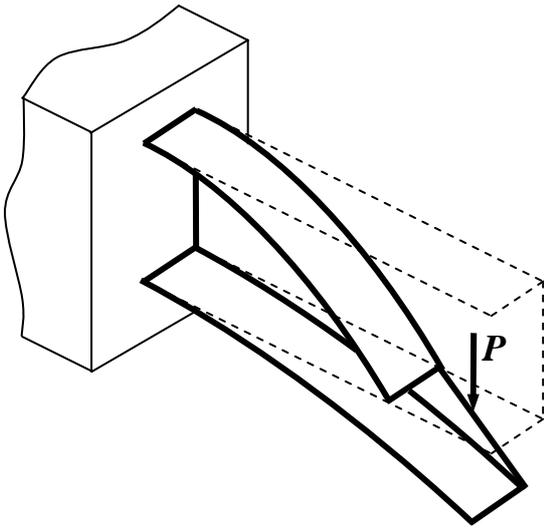


Рис.10.11

На рис.10.10 показано положение центра изгиба C для двух сечений, у которых главная ось Oy не является осью симметрии. Можно видеть, что в обоих случаях центр изгиба значительно смещен относительно центра тяжести вдоль оси, вокруг которой изгибается балка. Это обычное явление, когда силовая плоскость не параллельна плоскости симметрии балки, и этому соответствует появление крутящего момента (10.10), который не может возникнуть из требований к нагрузкам, создающим изгиб.

Реально линия действия касательных сил не смещается вдоль главной оси, вокруг которой изгибается балка (оси Ox на рис.10.10), а остается на главной оси, лежащей в силовой плоскости (оси Oy). Дело в том, что истинные касательные напряжения в случаях на рис.10.10 заметно отличаются от расчетных из-за невыполнения гипотез изгиба, и правильно было бы говорить об истинной и расчетной линиях действия касательных сил, которые не совпадают. В некоторых учебниках указывается на возникновение дополнительного крутящего момента, который «нейтрализует» расчетный момент (10.10), но не объясняются причины этого [9: с.319].

Итак, система четырех гипотез изгиба не выполняется, если расчетный центр изгиба смещен относительно центра тяжести сечения. В частности, при этом не выполняются две основных гипотезы изгиба: из них следует, что плоскость прямого изгиба должна совпадать с силовой плоскостью, но опыты этого не подтверждают. На рис.10.11 показан пример прямого изгиба консоли со смещенным расчетным центром изгиба при действии вертикальной нагрузки P на конце. Линия действия этой нагрузки проходит через центр тяжести сечения, однако упругая линия балки не лежит в вертикальной плоскости.

Излагаемая «классическая» теория изгиба содержит противоречия, однако можно построить уточненную теорию изгиба, в которой указанные противоречия устранены. В новой теории скользящую СК следует помещать не в центре тяжести сечения, а в центре изгиба, и, соответственно, рассчитывать внутренние моменты относительно центра изгиба. Признаком изгиба в новой теории по-прежнему являются равенства

$$M_z = 0; N = 0,$$

однако крутящий момент M_z теперь определяется иначе, и требования к нагрузкам, вызывающим изгиб, будет иным.

Введем определение: *Линией жесткости стержня называется линия, образованная совокупностью центров изгиба во всех сечениях.* В новом подходе крутящий момент в сечении суть осевой момент относительно

но линии жесткости, и к силовой плоскости предъявляется требование, чтобы она содержала эту линию. Понятие прямого изгиба в уточненной теории остается прежним, то есть *прямым изгибом называется случай параллельности вектора изгибающего момента одной из главных центральных осей сечения*. Несложно показать, что вектор изгибающего момента не изменится при переходе от полюса O к полюсу C , поскольку этот вектор определяется нормальными напряжениями в сечении с алгебраической величиной главного вектора сил $N = 0$. Это позволяет при новом понимании изгиба получить формулу (8.5) для нормальных напряжений в СК Ox на главных центральных осях и на ее основе установить три свойства нейтральной линии при изгибе (см. лекцию 8).

Повторением вывода классической теории можно прийти к формуле Журавского для тонкостенных сечений (10.8), в которой характеристики сечения S_x^* и J_x определяются для главных центральных осей. Поскольку распределение касательных напряжений согласно уточненной теории оказалось таким же, как в классической теории изгиба, линия действия касательных сил проходит по-прежнему через центр изгиба. Но по новой теории это так и должно быть, поскольку касательные напряжения не создают момент относительно центра изгиба, то есть этот центр есть точка приложения касательных сил. Таким образом, новый формализм позволяет устранить противоречие, состоящее в появлении крутящего момента при изгибе. Благодаря этому в случае прямого изгиба обеспечивается совпадение плоскости изгиба с силовой плоскостью, и результаты расчетов перемещений балки соответствуют опыту.

На рис.10.12 показан случай прямого изгиба швеллера согласно уточненной теории: для смещения нагрузок на линию жесткости использованы боковые площадки нагружения.

Согласно оценкам работы [45] расчет на прочность тонкостенных балок несимметричного профиля по классической теории изгиба может приводить к значительным погрешностям, которые не возникают в уточненной теории.

Замечание. В лекции 20 рассматривается принцип независимого действия сил, с помощью которого можно установить, что центр изгиба является точкой приложения равнодействующей касательных сил при любом изгибе, а не только прямом [10: с.161]. Таким образом, уточненная теория позволяет исследовать кривой изгиб наряду с прямым изгибом, без противоречий при расчетах касательных напряжений и прогибов.

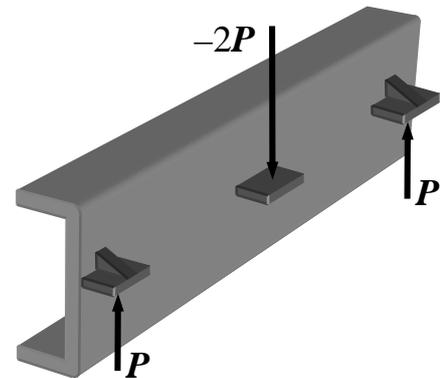


Рис.10.12. Смещение нагрузок на линию жесткости с помощью выносных силовых элементов

Дополнение к лекции

Закон парности касательных напряжений

Рассмотрим действие касательных напряжений на две взаимно перпендикулярные элементарные площадки, проходящие через заданную точку твердого тела. Такие площадки будем для краткости называть парными. Свойство симметрии матрицы напряжений (1.9) можно сформулировать как *закон парности касательных напряжений*: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены каждое либо к ребру, либо от ребра.

Рис.10Д.1 поясняет этот закон: через произвольную точку A твердого тела проходят две парных площадки 1 и 2, на которых действуют касательные напряжения τ_1 и τ_2 , соответственно.

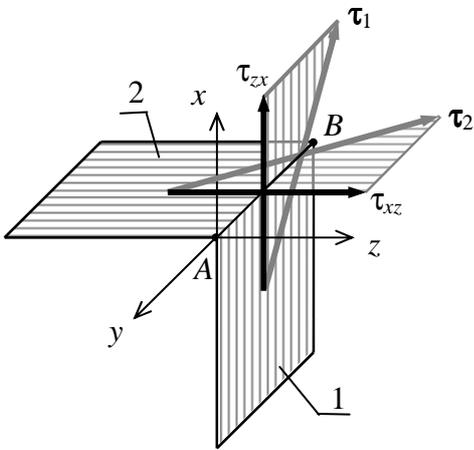


Рис.10Д.1

Каждое из этих напряжений можно представить как сумму двух составляющих, из которых одна параллельна ребру AB , а другая перпендикулярна к этому ребру. Составляющие, перпендикулярные к общему ребру, равны по модулю, соответственно, $|\tau_{zx}|$ и $|\tau_{xz}|$. Величины составляющих одинаковы в силу симметрии матрицы напряжений, а направления определяются знаками компонент τ_{zx} и τ_{xz} . Например, если $\tau_{zx} = \tau_{xz} > 0$, то обе составляющих направлены к ребру AB .

Применяя закон парности, следует помнить, что парные напряжения — это составляющие полных касательных напряжений на парных площадках. Полные касательные напряжения не обязательно равны по величине.